

Aprofundamento de funções

Prof.ª Loisi Carla Monteiro Pereira

Descrição

Abordagem das funções por vários pontos de vista complementares: descrição como conceito matemático, estudo analítico e representação gráfica. Consolidação da importante noção de função real de uma variável real.

Propósito

Compreender a relevância do conceito de função para a interpretação e a resolução de problemas diversos, inclusive fenômenos naturais, sociais e de outras áreas.

Objetivos

Módulo 1

Domínio, imagem e o contradomínio de funções

Reconhecer graficamente o domínio, a imagem e o contradomínio de funções.

Módulo 2

Tipos de funções: injetora, sobrejetora e bijetora

Identificar graficamente os tipos de funções: injetora, sobrejetora e bijetora.

Módulo 3

Funções crescentes e decrescentes

Definir funções crescentes e decrescentes.

Módulo 4

Funções periódicas

Definir funções periódicas.



Introdução

Para fazermos modelos matemáticos de nossa realidade, associamos quantidades numéricas aos acontecimentos, fatos e objetos que desejamos estudar ou analisar.

É comum obtermos relações expressas em termos de fórmulas ou expressões matemáticas, porém, muitas vezes, as expressões obtidas nem sempre dão origem a um número real para todos os possíveis valores da variável independente.

Nosso estudo se restringirá ao estudo das funções reais de variável real, ou seja, tanto o domínio quanto o contradomínio são subconjuntos de R ou até mesmo todo o R. Mostraremos também como as funções se comportam em determinados intervalos da reta real e algumas de suas aplicações.

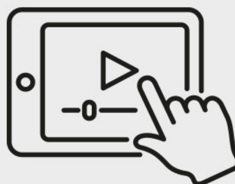
Além disso, se olharmos para a natureza, vamos descobrir muitos fenômenos que acontecem de forma repetitiva em intervalos de tempos regulares, obedecendo, portanto, a padrões cíclicos, como as estações do ano e os batimentos cardíacos, por exemplo. Fenômenos como esses são modelados usando uma classe importante de funções: as periódicas. Dentre a classe das funções periódicas, destacaremos as chamadas funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente.

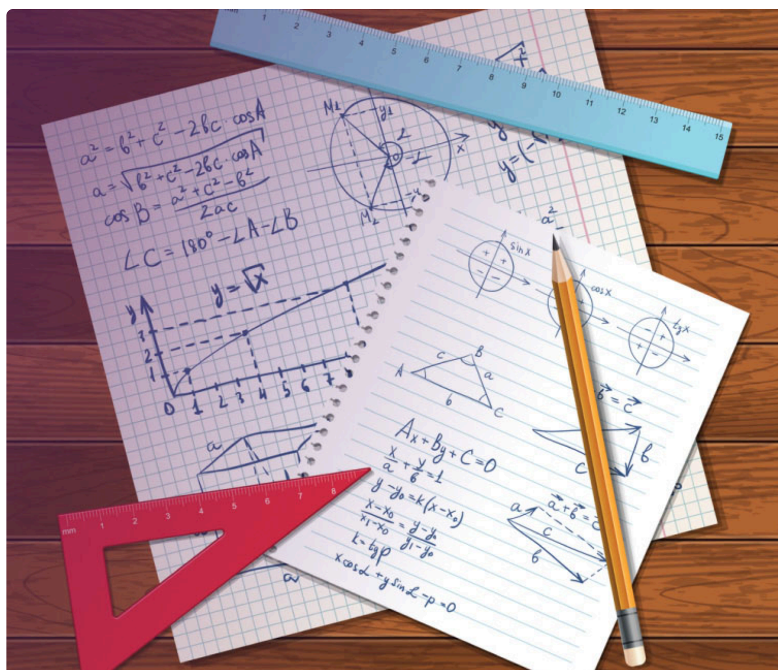
Para começar, confira o vídeo, a seguir, para vermos o quanto é importante aprofundarmos sobre as funções.



Introdução

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.





1 - Domínio, imagem e o contradomínio de funções

Ao final deste módulo, você será capaz de reconhecer graficamente o domínio, a imagem e o contradomínio de funções.

Vamos começar!



Definições básicas das funções

Confira o vídeo, a seguir, em que iremos relembrar as definições básicas relativas às funções.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



f">

Função

Definição

O domínio da função f é o maior subconjunto de R onde a expressão (ou fórmula) que define a função assume valores reais, ou seja:

$$D(f) = \{x \in R \mid f(x) \in R\}$$

Veja nas imagens três representações gráficas de funções cuja lei de formação é $f(x) = x^2$ e os seus domínios.

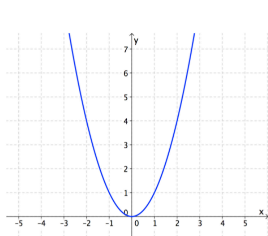


Gráfico: $D_1 = R$

Loisi Carla Monteiro Pereira

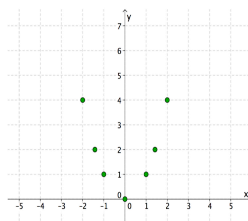


Gráfico: $D_2 = \{-2;-\sqrt{2};-1;0;1;\sqrt{2};2\}$

Loisi Carla Monteiro Pereira

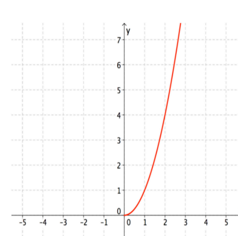


Gráfico: $D_3 = [0;+\infty[$

Loisi Carla Monteiro Pereira

Quando uma função está definida por uma fórmula matemática, a fórmula em si pode impor restrições sobre os valores reais para os quais podemos calculá-la.

Exemplo 1

Qual é o domínio da função $f(x) = 1 \div x$? Veja o gráfico a seguir:

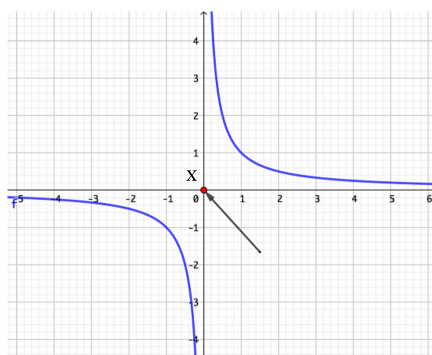


Gráfico: Função $f(x) = 1 \div x$

Loisi Carla Monteiro Pereira

Repare que $x = 0$ não está no domínio dessa função, pois a divisão por 0 (zero) não está definida. Logo, $D(f) = R^*$. O asterisco indica que estamos tratando dos reais positivos excluindo o zero.

Exemplo 2

Qual é o maior subconjunto de $X \subset R$, tal que a fórmula $g(x) = \sqrt{x}$ define uma função $f: X \longrightarrow R$? Observe o gráfico a seguir:

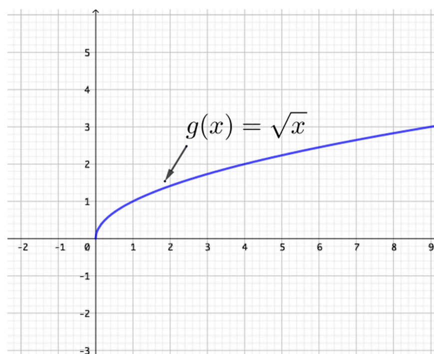


Gráfico: A fórmula $g(x) = \sqrt{x}$
Loisi Carla Monteiro Pereira

Como só podemos calcular a raiz quadrada de valores não negativos, temos: $D(g) = [0; +\infty[$.

Exemplo 3

Vamos ver na prática como determinar o domínio de uma função? Pensando em construir uma piscina retangular em sua casa, João recorreu à Revista Casa e Jardim, da Globo, onde encontrou um modelo de piscina que contracena com a represa no projeto assinado pela arquiteta Eliana Marques Lisboa.



Sabendo que o terreno onde será construída a piscina deve ser cercado com $240m$ de cerca, faça o que se pede:

- Expresse a área do terreno em metros quadrados em função do comprimento do terreno;
- Determine o domínio da função resultante. Lembre-se de que a expressão que determina a área de uma figura retangular é dada pelo produto entre o comprimento e a largura.



Resolução da prática 3

Confira o vídeo, a seguir, da resolução da prática 3.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Exemplo 4

Sabendo que o comprimento do terreno de João é de $100m$, utilize a expressão obtida $A = x \times (120 - x)$ para determinar a área do terreno onde será construída a piscina.

Resolução da questão

Conforme visto no exemplo 3, a área do terreno é dada pela expressão $A = x \times (120 - x)$, onde x é o número de metros de comprimento do terreno.

Logo, temos:

$$A(100) = 100 \times (120 - 100) = 2000\ m^2$$

Isso significa que a imagem de 100 pela função A é 2000.

Os gráficos das funções podem fornecer **informações visuais** importantes sobre uma função. O gráfico de uma função pode ser definido como:

$$\text{Graf}(f) = \{(x; f(x)) \mid x \in D(f)\}$$

Portanto, a ordenada y de um ponto do gráfico da função f é o valor de f na abscissa x correspondente.

O gráfico de f também nos permite visualizar o domínio e a imagem, além de muitas outras informações.

Leitura gráfica e domínio de imagem

Domínio da função f

O domínio da função f é o maior subconjunto de R, onde a expressão (ou fórmula) que define a função assume valores reais, ou seja:

> ### Como saber se um número real **a** pertence ao domínio de uma função f?

O número real **a** pertence ao domínio de uma função f se a reta vertical $x = a$ corta o gráfico de f em um ponto. Como f é uma função, este ponto é necessariamente único, conforme visto no seguinte gráfico:

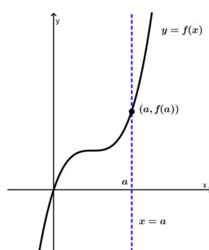


Gráfico: Número real **a** e a função f
Loisi Carla Monteiro Pereira

Exemplo 1

Considere os seguintes dados de taxa de crescimento 2010-2060 do Brasil e de Tocantins:



Gráfico: Dados de taxa de crescimento 2010-2060 do Brasil e de Tocantins

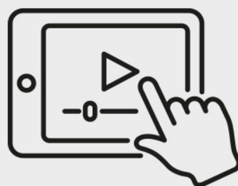
Verifique que, no ano de 2030, temos uma única taxa de crescimento, tanto no Brasil quanto em Tocantins.

Como saber se um número real **b** pertence à imagem de uma função f?

O número real **b** pertence à imagem de uma função f se a reta horizontal $y = b$ cortar o gráfico de f em pelo menos um ponto.



Como saber se um número real a pertence à imagem de uma função f ?



Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

Exemplo 2

Verifique que o valor $0,82$ pertence tanto à imagem da função que representa a taxa de crescimento no Tocantins quanto à função que representa a taxa de crescimento no Brasil, em 2018 e 2029, respectivamente. Veja o gráfico da taxa de crescimento 2010-2060 do Brasil e de Tocantins, a seguir:

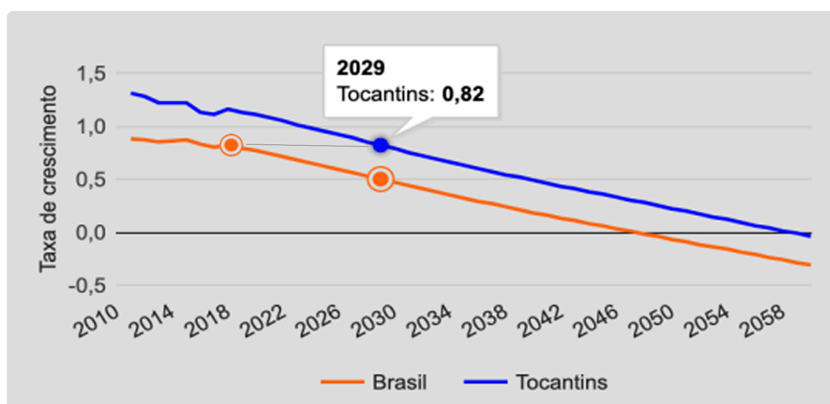


Gráfico: Taxa de crescimento 2010-2060 do Brasil e de Tocantins
Adaptado de IBGE, 2008

Domínio



Definição do domínio da função

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Exemplo 1

Dado o gráfico de uma função, uma forma de encontrar o domínio da função é projetar o gráfico no eixo O_x.

Observe o gráfico da função f:

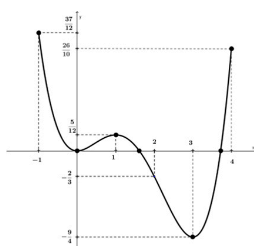


Gráfico: Função f
Loisi Carla Monteiro Pereira

O que acontece se projetarmos o gráfico da função no Eixo O_x? Confira no gráfico a seguir:

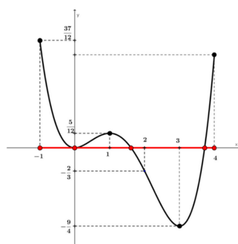


Gráfico: A função no eixo O_x
Loisi Carla Monteiro Pereira

Vemos que o domínio da função f é o intervalo no eixo das abscissas indicado em vermelho. Seu domínio é o intervalo fechado: $D(f) = [-1, 4]$.

Exemplo 2

Observe o gráfico da função g:

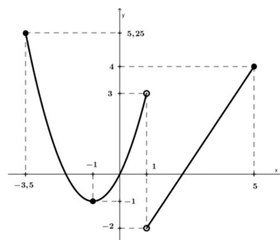


Gráfico: Função g
Loisi Carla Monteiro Pereira

O que acontece se projetarmos o gráfico da função no eixo O_x? Confira a seguir:

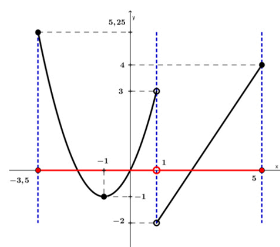


Gráfico: A função g projetada no eixo O_x
Loisi Carla Monteiro Pereira

Vemos que o domínio da função g é o conjunto no eixo das abscissas indicado em vermelho. Seu domínio é a união de intervalos disjuntos (intervalos cuja interseção é vazia):

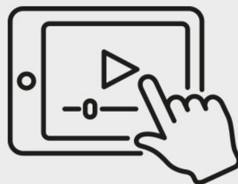
$$D(g) = \left[-\frac{7}{2}, 1\right) \cup (1, 5)$$



Domínio da função

Confira o vídeo, a seguir, de mais um exemplo de domínio da função.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Imagem

Exemplo 1

Dado o gráfico de uma função, uma forma de encontrar a imagem da função é projetar o seu gráfico no Eixo O_y.

Observe o gráfico da função f

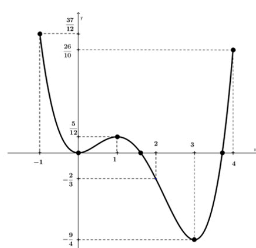


Gráfico: Função f
Loisi Carla Monteiro Pereira

O que acontece se projetarmos o gráfico da função no eixo O_y? Veja a seguir:

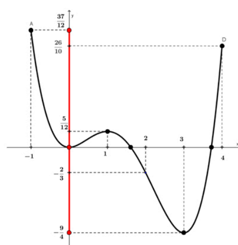


Gráfico: A função no eixo O_y
Loisi Carla Monteiro Pereira

Vemos que a imagem da função f é o intervalo fechado indicado em vermelho no Eixo O_y. Sua imagem é o intervalo fechado.

$$\left[-\frac{9}{4}; \frac{37}{12}\right], \operatorname{Im}(f) = \left[-\frac{9}{4}; \frac{37}{12}\right].$$

Exemplo 2

Observe o gráfico da função g :

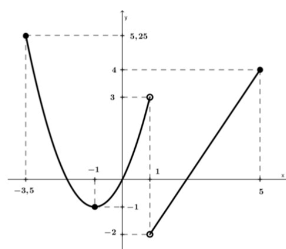


Gráfico: A função g
Loisi Carla Monteiro Pereira

O que acontece se projetarmos o gráfico da função no Eixo O_y? Confira a seguir:

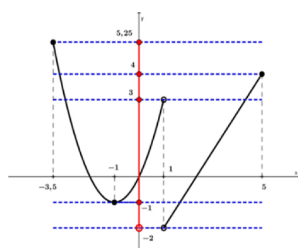


Gráfico: A função g projetada no Eixo O_y
Loisi Carla Monteiro Pereira

Vemos que a imagem da função g é o intervalo indicado em vermelho no Eixo O_y. Sua imagem é o intervalo $(-2;\ 5{,}25]$.

$Im(g) = (-2;\ 5{,}25]$.

Exemplo 3

Considere o gráfico da função h:

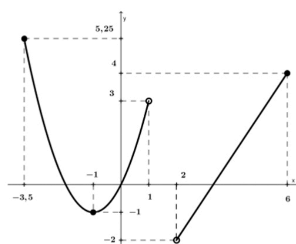


Gráfico: Função h
Loisi Carla Monteiro Pereira

Se projetarmos o gráfico da função no eixo O_y, vemos que a imagem da função h é o intervalo indicado em vermelho no eixo O_y, conforme mostrado a seguir:

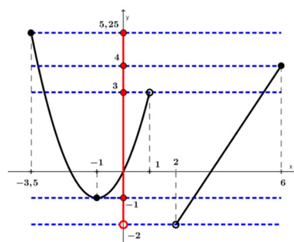


Gráfico: A função no eixo O_y
Loisi Carla Monteiro Pereira

Sua imagem é o intervalo $(-2; 5, 25)$.

$Im(h) = (-2 ; 5{,}25]$.

Em resumo, é possível determinar a imagem de um conjunto de pontos:

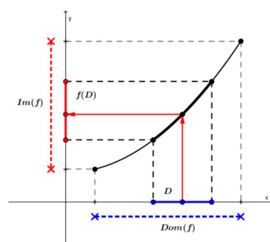


Gráfico: Imagem de um conjunto de pontos
Loisi Carla Monteiro Pereira

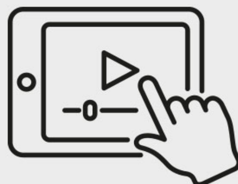
Se D é um subconjunto do domínio da função f (pintado de azul no gráfico), então, a imagem deste subconjunto é dada por $f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$.



Exemplo 4

Confira o vídeo, a seguir, de mais um exemplo de imagem da função.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Exemplo 5

Observe o gráfico da função f e o intervalo $[-\,^{2}/_{3};\ ^{5}/_{12}]$ destacado em verde no eixo O_y, que é um subconjunto da imagem de f.

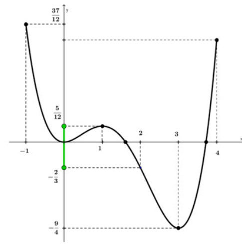


Gráfico: Função f
Loisi Carla Monteiro Pereira

Ao traçar as retas $y = {}^{5}/_{12}$ e $y = -\,^{2}/_{3}$ de forma horizontal, partindo no eixo O_y temos:

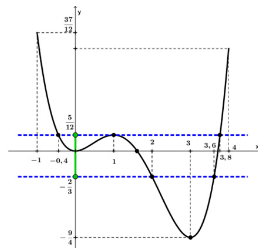


Gráfico: as retas $y = {}^{5}/_{12}$ e $y = -\,^{2}/_{3}$
Loisi Carla Monteiro Pereira

Se pegarmos a parte do gráfico restrita à região entre as retas $y = -\,^{2}/_{3}$ e $y = {}^{5}/_{12}$ temos:

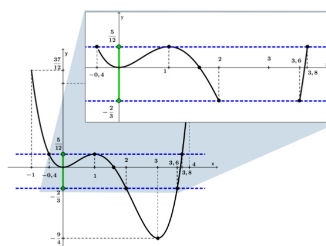


Gráfico: A região entre as retas $y = -\,^{2}/_{3}$ e $y = {}^{5}/_{12}$
Loisi Carla Monteiro Pereira

Agora, para descobrirmos a parte do domínio correspondente ao intervalo $[-^{2}/_{3};\ ^{5}/_{12}]$ da imagem, basta projetarmos no eixo O_x. A parte do eixo O_x que nos interessa está destacada em vermelho: $[-0{,}4\ ;\ 2]$ U $[3{,}6\ ;\ 3{,}8]$:

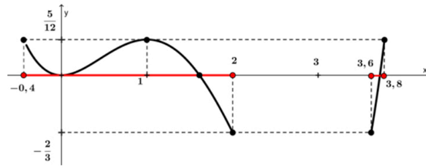


Gráfico: Parte do domínio correspondente ao intervalo $[-^2/_3;\ ^5/_{12}]$
Loisi Carla Monteiro Pereira

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

(PETROBRAS - 2008) Considere que f é uma função definida do conjunto D em R por: $f(x) = x^2 - 4x + 8$. Sendo Im a imagem de f, é correto afirmar que, se:

A $D = [-2,\ 0]$, então $Im(f) = R^+$

B $D = [2,\ +\infty[$, então $Im(f) = [0;\ 4]$

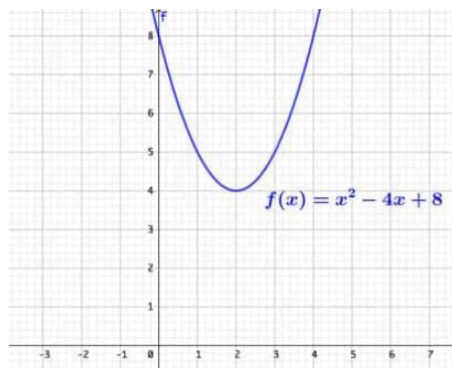
C $D = [2,\ +\infty[$, então $Im(f) = R^+$

D $D = [0;\ 2]$, então $Im(f) = [4;\ 8]$

E $D = [-2,\ 0]$, então $Im(f) = [4,\ 8]$

Parabéns! A alternativa D está correta.

O gráfico da função f é dado por:



Loisi Carla Monteiro Pereira

Vamos analisar cada restrição do domínio da função f.

Note que, se D = [−2, 0], temos que $Im(f) = [8, 20]$.

Se $D = [2, +\infty[$, temos que $Im(f) = [4, +\infty)$.

Se $D = [0; 2]$, temos que $In(f) = [4 ; 8]$.

Questão 2

Considere a função $f(x) = 120x \div (300-x)$. Podemos afirmar que o domínio da função f é:

A Todo número real x.

B Todo número real x, exceto os números positivos.

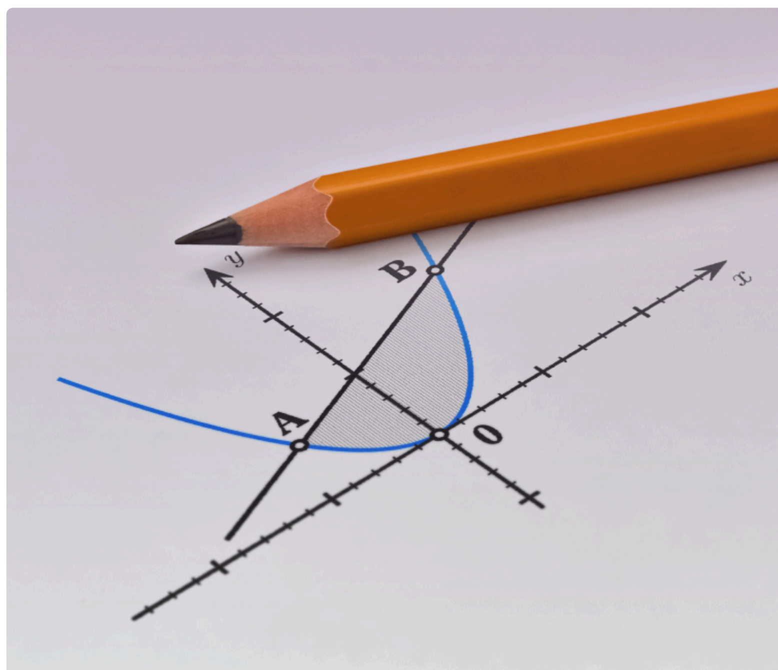
C Todo número real x, exceto $x = 300$.

D Todo número real x, exceto os números negativos.

E Todo número real x, exceto $x = 0$.

Parabéns! A alternativa C está correta.

A função não está definida para $x = 300$, pois este número anula o denominador.



2 - Tipos de funções: injetora, sobrejetora e bijetora

Ao final deste módulo, você será capaz de identificar graficamente os tipos de funções: injetora, sobrejetora e bijetora.

Funções injetoras



Funções injetoras

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Definição

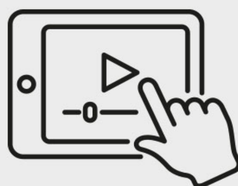
Uma função f é dita injetora (ou injetiva) se, para quaisquer dois números $a_1, a_2 \in$ Dom (f), tais que $a_1 \neq a_2$, os números $f(a_1)$ e $f(a_2)$ na imagem de f são também distintos.



Injeção, sobrejeção e bijeção

Confira o vídeo, a seguir, de um exemplo de injeção, sobrejeção e bijeção.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Exemplo 1

A função $f(x) = x^2 - 1$, definida para todos os números reais, é injetiva? Observe que: $f(-2) = (-2)^2 - 1 = 3 = 2^2 - 1 = f(2)$. Em outros termos, -2 e 2 têm a mesma imagem. Logo a representação gráfica fica da seguinte forma:

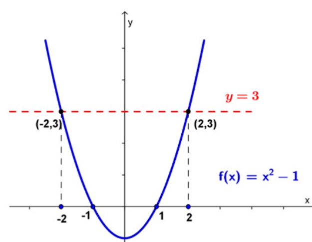


Gráfico: A função f e reta horizontal $y = 3$.
Loisi Carla Monteiro Pereira

A partir da representação gráfica da função $f(x) = x^2 - 1$, é possível observar que há retas horizontais que intersectam seu gráfico mais de uma vez.

Atenção!

Teste da reta horizontal

Uma função é injetiva se, e somente se, toda reta horizontal intersecta seu gráfico em, no máximo, um ponto.

Observe que, pelo teste da reta horizontal, a função do exemplo citado não é injetiva.

Exemplo 2

A função $g(x) = x^3$ é injetiva, conforme consta no gráfico a seguir:

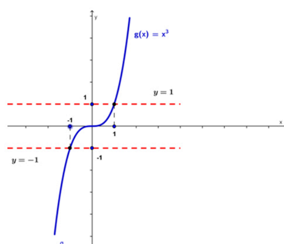


Gráfico: a função $g(x) = x^3$
Loisi Carla Monteiro Pereira

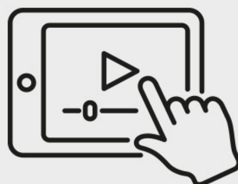
Qualquer reta horizontal intersecta o gráfico em apenas um ponto. Logo, pelo teste da reta horizontal, a função g é injetiva.

A seguir, veja a definição das funções sobrejetoras e bijetoras:



Funções sobrejetoras

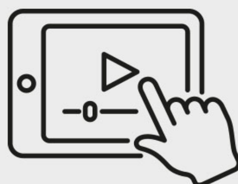
Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.





Funções bijetoras

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Sobrejetoras 

Se $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \subset R$, uma função $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ é chamada sobrejetora ou sobrejetiva, quando $f(A) = B$.

Repare que, quando restringimos o contradomínio de uma função para sua imagem, ou seja, $f: Dom(f) \rightarrow f(Dom(f))$, estamos garantindo que não há qualquer elemento do contradomínio que não seja imagem de algum elemento do domínio. Assim, essa é uma forma de garantir que a função seja sobrejetiva.

Bijetoras 

Uma função f, que é simultaneamente injetora e sobrejetora, é chamada de bijetora ou bijetiva.

Assim, a função $f: Dom \rightarrow f(Dom(f))$ (que já é sobrejetora) será bijetora se, e somente se, for injetora.

Relação geométrica entre os gráficos de uma função e sua inversa

O objetivo é mostrar graficamente a relação existente entre o gráfico de uma função bijetora e sua inversa.

Atenção!

Lembre-se de que uma função ter inversa é equivalente a ela ser bijetiva.

Sintetizamos algumas informações sobre uma função f e sua inversa f^{-1}, a seguir:

$$f : A \to B \text{ e } f^{-1} : B \to A$$

se f 'leva' $\boldsymbol{a}$ em $\boldsymbol{b}$ então $\boldsymbol{f^{-1}}$ 'traz' $\boldsymbol{b}$ 'de volta' em $\boldsymbol{a}$

$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$

$$\text{Dom}(f) = \text{Im}\left(f^{-1}\right) \text{ e } \text{Dom}\left(f^{-1}\right) = \text{Im}(f)$$

É preciso notar que:

$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$

Mas, o que essa equivalência significa geometricamente? Que o ponto $(a\ ,\ b)$ estar no gráfico da função f é equivalente ao ponto $(a,\ b)$ estar no gráfico da função f^{-1}:

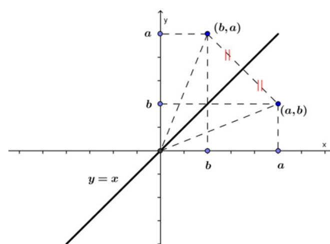


Gráfico: Simetria dos pontos $(a,\ b)$ e $(b,\ a)$ em relação à reta $y = x$
Loisi Carla Monteiro Pereira

No gráfico, percebemos que os pontos $(a,\ b)$ e $(b,\ a)$ são simétricos em relação à reta $y = x$. Mas, isso é verdade para todos os pontos das funções f e f^{-1}.

O gráfico de f^{-1} é obtido refletindo-se o gráfico de f em torno da reta $y = x$, conforme a seguir:

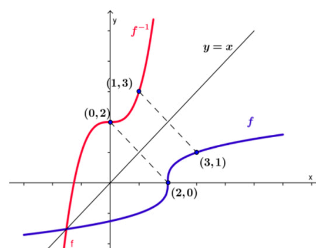
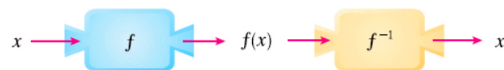


Gráfico: Simetria entre os gráficos de f e f^{-1}
Loisi Carla Monteiro Pereira

Se f e g forem funções inversas entre si, temos:

$$x = f^{-1}(f(x)) \qquad y = f\left(f^{-1}(y)\right)$$

A lei da esquerda nos diz que, se começarmos em x, aplicando f, e, em seguida, f^{-1}, obteremos de volta x. Veja a seguinte imagem:



Resultado x

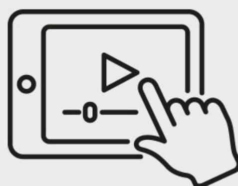
Da mesma forma, a lei da direita nos diz que, se começarmos em y, aplicando f^{-1}, e, em seguida, f, obteremos de volta y.



Exemplo 1

Confira o vídeo, a seguir, de um exemplo de relação geométrica entre os gráficos de uma função e sua inversa.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

Considere a função bijetora $f: [1, +\infty) \rightarrow (-\infty, 3]$ definida por $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ e seja (a, b) o ponto de interseção de f com sua inversa f^{-1}. O valor numérico da expressão $a + b$ é:

A 2

B 4

C 6

D 8

E 9

Parabéns! A alternativa B está correta.

Repare que neste domínio a função é estritamente decrescente. Vamos buscar os pontos onde f encontra a sua inversa encontrando os pontos em que f intercepta a função $y = x$ (função identidade). Logo:

$-x^2 + 2x + 2 = x \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -1$

Como o domínio de f é o intervalo $[1, +\infty)$, o único valor de x que nos interessa é $x = 2$ e, para este valor, $f(2) = 2$. Assim, o ponto buscado é $(a, b) = (2, 2)$ e então $a + b = 4$.

Questão 2

Considere a função $f: [-1, 2] \to R$, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } -1 \leq x \leq 0 \\ (x+1) \div 2, \text{ se } 0 < x \leq 1 \\ -x + 2, \text{ se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Nestas condições, é correto afirmar que:

A f é sobrejetora.

B f é injetora.

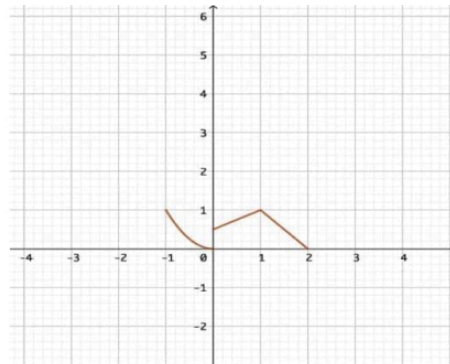
C f é bijetora.

D $Im(f) = [0, 1]$.

E $D(f) = R$.

Parabéns! A alternativa D está correta.

Observe o gráfico da função f:



Loisi Carla Monteiro Pereira

Utilizando o teste da horizontal, vemos que a função não é injetora e, consequentemente, não é bijetora. Em contrapartida, $Im(f) = [0,1] \neq R$. Logo, a função f não é sobrejetora.



3 - Funções crescentes e decrescentes

Ao final deste módulo, você será capaz de definir funções crescentes e decrescentes.

Vamos começar!



Exemplo de função crescente e decrescente

Confira o vídeo, a seguir, de um exemplo de função crescente e função decrescente.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Função crescente e decrescente

Definição



Função crescente e decrescente parte 1

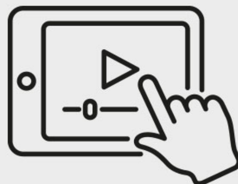
Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.





Função crescente e decrescente parte 2

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Uma função $f\colon R \rightarrow R$ é considerada crescente quando os valores das imagens, $f(x)$, aumentam à medida que os valores de x aumentam, ou seja, para $x_2 > x_1$, temos: $f(x_2) > f(x_1)$.

Em termos gráficos, temos:

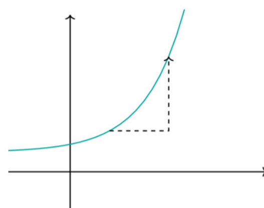


Gráfico: Função $f\colon R \rightarrow R$ crescente
Loisi Carla Monteiro Pereira

Uma função $f\colon R \rightarrow R$ é considerada decrescente quando os valores das imagens, $f(x)$, diminuem à medida em que os valores de $\boldsymbol{x}$ aumentam, ou seja, para $x_2 > x_1$, temos: $f(x_2) < f(x_1)$.

Em termos gráficos, temos:

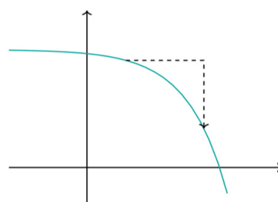


Gráfico: A função $f\colon R \rightarrow R$ decrescente
Loisi Carla Monteiro Pereira

Exemplo 1

O gráfico, a seguir, mostra a chuva acumulada mensal no município de Campos (RJ), em 2020, e a chuva acumulada mensal, de acordo com as normas climatológicas entre 61-90:

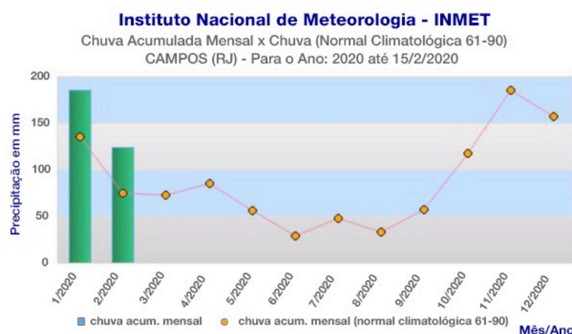


Gráfico: Dados de chuva acumulada mensal
INMET

Note que ocorreu um decréscimo da quantidade de chuva acumulada do mês de janeiro ao mês de fevereiro. Além disso, de acordo com a Normal Climatológica, no mês de outubro, a previsão é de um aumento significativo das chuvas acumuladas.

Exemplo 2

Veja a projeção do crescimento da taxa bruta de mortalidade e natalidade do Brasil, do início de 2010 a 2058:

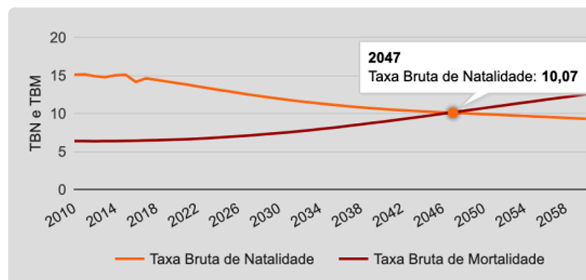


Gráfico: Dados do crescimento da taxa bruta de mortalidade e natalidade do Brasil
Adaptado de Loisi Carla Monteiro Pereira

Observe que a taxa bruta de natalidade decresce, enquanto ocorre um crescimento na taxa bruta de mortalidade.

Exemplo 3

Considere a função $f(x) = x^3$:

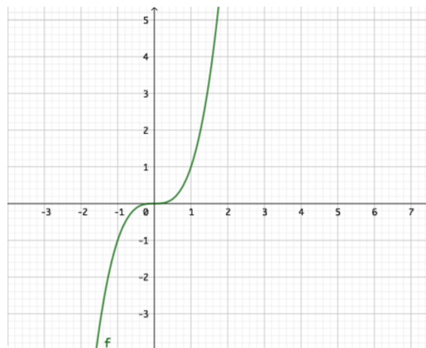


Gráfico: Função $f(x) = x^3$
Loisi Carla Monteiro Pereira

Note que essa função é crescente em toda a reta real. De fato, dados $x_2 < x_1$, temos que

$$f(x_1) = x_1^3 < x_2^3 = f(x_2)$$

Exemplo 4

Considere a função $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, x > 1 \\ -x^2, x < 0 \\ 0, 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

:

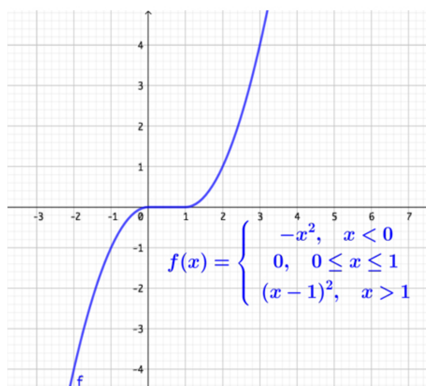


Gráfico: a função $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, x > 1 \\ -x^2, x < 0 \\ 0, 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

Loisi Carla Monteiro Pereira

Observe que a função apresentada **não** é estritamente crescente em toda reta real, já que ela é constante no intervalo $[0, 1]$.

As funções estritamente crescentes têm um papel especial em Cálculo I.

Exemplo 5

Vamos praticar! Analise o seguinte gráfico da função:

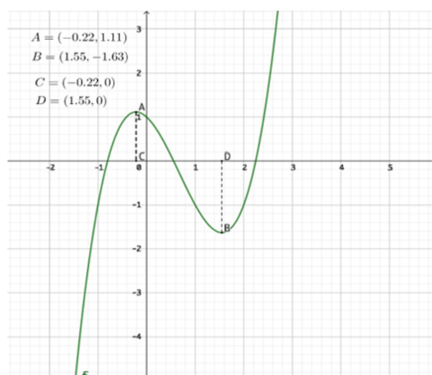


Gráfico: Função
Loisi Carla Monteiro Pereira

Agora, determine os intervalos onde a função é crescente e onde é decrescente.

Resolução da questão 

Observando o gráfico, vemos que a função é crescente em:

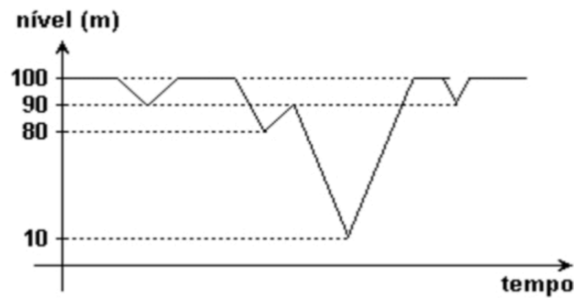
$(-\infty, -0.22) \cup (1.55, +\infty)$ e decrescente em $(-0.22, 1.55)$.

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

(Adaptada de: UFPE - 2017) No gráfico a seguir, temos o nível da água armazenada em uma barragem ao longo de três anos:



Loisi Carla Monteiro Pereira

De acordo com o gráfico, podemos afirmar que:

A O nível de $70m$ foi atingido uma única vez.

B O nível da água armazenada cresce em todo tempo.

C O nível da água armazenada é estritamente decrescente.

D O nível de $40m$ foi atingido 2 vezes nesse período.

E O nível de $20m$ não foi atingido nenhuma vez nesse período.

Parabéns! A alternativa D está correta.

Traçando uma reta horizontal paralela ao eixo x (tempo), vemos que o nível de $40m$ foi atingido 2 vezes no período de 3 anos. Isso já mostra que a função, cujo gráfico tem a representação da figura, não é injetora. Além disso, como existem oscilações no nível da água armazenada, em alguns instantes ela cresce e em outros decresce. Assim, a função em questão não é crescente nem decrescente.

Questão 2

Uma função $f : R_+ \longrightarrow R_+$ é crescente e satisfaz a seguinte condição: $f(3x) = 3f(x)$, para todo $x \in R_+$.

Se $f(9) = 27$, qual o valor de $f(1)$?

A 1

B 2

C 3

D 4

E 5

Parabéns! A alternativa C está correta.

Note que:

$$27 = f(9) = f(3 \times 3) = 3 \times f(3 \times 1) = 3 \times 3 \times f(1)$$

Logo, temos:

$$f(1) = {}^{27}/_{9} = 3$$



4 - Funções periódicas

Ao final deste módulo, você será capaz de definir funções periódicas.

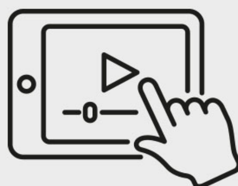
Vamos começar!



Exemplo de função periódica

Confira o vídeo, a seguir, de um exemplo de função periódica.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



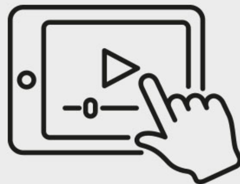
Função periódica

Definição



Funções periódicas

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Uma função é considerada periódica quando existe um número real $T > 0$, tal que $f(x + T)$, para todo x no domínio da função.

O menor dos valores de $T > 0$, para os quais a propriedade é verificada, é chamado de período da f.

Atenção!

Se uma função f é periódica de período T, então, f também é periódica de período nT, onde $n \in N$, já que:

$$f(x) = f(x + T) = f(x + 2T) = f(x + 3T) = . . . = f(x + nT)$$

Exemplo 1

Considere a função f do gráfico mostrado na imagem a seguir, que corresponde ao eletrocardiograma de uma pessoa saudável:

Eletrocardiograma

Exame que tem o objetivo de detectar se existe alguma falha na condução elétrica pelo coração.

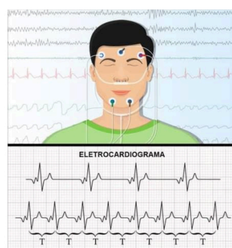


Gráfico: Função f

Observe que o padrão de repetição ocorre em intervalos de comprimento T, e não em intervalos de comprimento menor. Assim, a

função f é uma função periódica de período T.

Exemplo 2

Considere a função:

$$f: N \longrightarrow Z, \text{ tal que } f(x) = (-1)^x$$

A tabela, a seguir, mostra o valor da função f para os valores de x de 0 a 5.

x	0	1
$f(x)$	$(-1)^0 = 1$	$(-1)^1 = -1$



Tabela: Valor da função f para os valores de x de 0 a 5
Adaptado de Loisi Carla Monteiro Pereira

Se x é um número par, $f(x) = 1$. Se x é um número ímpar, $f(x) = -1$.

> Esta é uma função periódica de período 2. Por quê?

Ora, quando x varia duas unidades, o valor da função se repete, ou seja:

$$f(x) = f(x+2) = f(x+4) = f(x+6) = \ldots$$

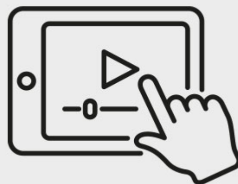
Dessa forma, podemos afirmar que o período dessa função é 2.

Exemplo 3



Funções seno, cosseno e tangente

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Considere a função $f(t) = sen(t)$ e P um ponto no ciclo trigonométrico.

Imagine que o ponto P se movimenta no ciclo no sentido anti-horário, a partir da posição $(1, 0)$ e dá uma volta completa, ângulo t varia de 0 até $2\pi(pi)$.

Pensando no ciclo, é possível perceber, na seguinte tabela, que:

Quando o ângulo t cresce de	O valor $f(t) = sen(t)$
0 a $\pi(pi) \div 2$	Cresce de 0 a 1
$\pi(pi) \div 2$ a $\pi(pi)$	Descresce de 1 a 0
$\pi(pi)$ a $3\pi(pi) \div 2$	Descresce de 0 a -1
$3\pi(pi) \div 2$ a $2\pi(pi)$	Cresce de -1 a 0

Tabela: A função $f(t) = sen(t)$ e o ângulo t
Adaptado de Loisi Carla Monteiro Pereira



Representação gráfica do exemplo 3

Confira o vídeo, a seguir, de um representação gráfica do que foi descrito no exemplo 3.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Exemplo 4

O fluxo de ar através da traqueia é uma função periódica do tempo x e ocorre em ambos os sentidos dos pulmões (inspiração e expiração).

O fluxo pode ser representado pela função:

$$f(x) = A\ sen(z\ x)$$



Onde constatamos que:

- **A = fluxo máximo durante a expiração e inspiração;**
- **z = período respiratório;**
- **$z = 2\pi(pi) \div T \rightarrow T =$ o tempo que o indivíduo leva para fazer um ciclo completo.**

A função f é, certamente, uma aproximação, pois T varia de indivíduo para indivíduo. Mas estudos experimentais mostram que é uma "boa" aproximação da realidade. Observe o seguinte gráfico:



Gráfico: $A = 1, T = {}^1/_4, A = 2, T = {}^1/_3$

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

Sendo $f: R \longrightarrow R$ uma função periódica de período 2, podemos afirmar que:

A A função $g(x) = f(2x)$ é periódica de período 4.

B A função $g(x) = f(2x)$ é periódica de período 1.

C A função $h(x) = f(x/2)$ é periódica de período 1.

D A função $h(x) = f(x + q)$, onde q é uma constante positiva, não é periódica.

E A função $h(x) = f(x/2)$ não é periódica.

Parabéns! A alternativa B está correta.

Note que a função $g(x) = f(2x)$ é periódica de período 1, pois:

$$g(x + 1) = f(2(x + 1)) = f(2x + 2) = f(2x) = g(x)$$

A função $h(x) = f(x/2)$ é periódica de período 4.

A função $h(x) = f(x + q)$ é periódica de período 4.

Questão 2

Considere que a função $f : [4, +\infty[\longrightarrow [-3, 7]$ seja periódica com período 6 e seja estritamente crescente no intervalo $[4, 10]$. Logo, podemos afirmar que:

A $f(10) = f(25)$ e $f(4) < f(8)$

B $f(12) = f(24)$ e $f(15) < f(16)$

C $f(15) = f(21)$ e $f(21) < f(22)$

D $f(18) = f(24)$ e $f(28) < f(27)$

E $f(20) = f(11)$ e $f(24) < f(25)$

Parabéns! A alternativa D está correta.

Veja que $f(24) = f(18 + 6) = f(18)$, pois f é periódica de período 6.

Além disso, $f(28) = f(4) = -3$, pois f é sobrejetora e estritamente crescente em $[4, 10)$,

e também $f(27) = f(9) > f(4)$. Assim, $f(28) < f(27)$.

Considerações finais

No estudo das funções reais de variável real, você pôde observar que a descrição de problemas de nosso cotidiano é realizada com o auxílio das funções.

O entendimento das funções reais de variável real requer aprender, de maneira mais aprofundada, a determinar o domínio e a imagem de alguns tipos de funções algébricas, bem como reconhecer geometricamente quando a função é injetora, sobrejetora e bijetora.

É muito importante que você faça todos os exercícios propostos e estude bem os exemplos apresentados para compreender melhor o conteúdo.



Podcast

Ouça um resumo sobre os principais assuntos abordados no tema.

Para ouvir o *áudio*, acesse a versão online deste conteúdo.



Explore +

Pesquise e consulte:

- **O aplicativo on-line GeoGebra;**

- **O Portal OBMEP do Saber.**

Busque e analise os seguintes resultados do uso do aplicativo GeoGebra:

BORGES, A. **Desenho da função seno.** GeoGebra. (s.d.).

CORREIA, P. **Duração do dia.** GeoGebra, (s.d.).

No primeiro, você encontra a construção do gráfico da função seno, e no segundo, um exercício interessante que mostra o número de horas de sol ao longo do ano em diferentes locais do planeta.

Referências

BRASIL. **Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.** Projeção da população do Brasil e das Unidades da Federação. Brasília: IBGE, 2008.

DELGADO GÓMEZ, J. J. **Pré-cálculo.** Rio de Janeiro: CEDERJ, 2002. v. 4.

FOMIN, D. A. **Círculos matemáticos.** Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar I.** São Paulo: Atual, 2013. v. 1.

LIMA, E.; CARVALHO, P. E. W.; MORCAGO, C. **A Matemática do Ensino Médio.** 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 1.

LIVRO ABERTO. **Funções.** (s.d.).

LUCENA, M. **Guerra às sacolinhas.** Galileu, n. 225, 2010.

MAESTRI, R. **Algumas boas notícias com algumas não tanto do Covid-19.** Jornal GGN, mar. 2020.

STEWART, J. **Cálculo. 5.** ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006. v. 1.

VISÃO SAÚDE. **Covid-19:** que países conseguiram contrariar a curva do Coronavírus? Publicação em: 20 mar. 2020.

Material para download

Clique no botão abaixo para fazer o download do conteúdo completo em formato PDF.

Download material

O que você achou do conteúdo?





Relatar problema